เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อนใช่หรือไม่

Is the Set of Real Numbers a Subset of the Set of Complex Numbers?

สรศักดิ์ ลี้รัตนาวลี

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จ. เชียงใหม่ 50200

Email: sorasak.l@cmu.ac.th

บทคัดย่อ

จากหนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของ สสวท. เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ได้กล่าวถึงสาเหตุที่มีการสร้างจำนวนเชิงซ้อนขึ้นมาคือ ในระบบจำนวนจริง สมการพหุนามบางสมการไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง เช่น สมการ $x^2 + 1 = 0$ เนื่องจากกำลังสองของจำนวนจริงใดๆ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้นผลบวกของกำลังสองของจำนวนจริงใดๆ กับหนึ่ง ต้องมีค่ามากกว่าศูนย์ จากสาเหตุดังกล่าวจึงได้มีการสร้างระบบจำนวนซึ่งขยายระบบจำนวนจริงออกไปเพื่อให้สามารถครอบคลุมทุกคำตอบของสมการพหุนามทั้งหมดได้ ดังนั้นจึงจะพิจารณาเซตที่มีเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซต ซึ่งเรียกเซตนั้นว่า เซตของจำนวนเชิงซ้อน บทความนี้ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเซตของจำนวนจริงและเซตของจำนวนเชิงซ้อนในอีกมุมมองหนึ่ง

คำสำคัญ : จำนวนเชิงซ้อน จำนวนจริง

Abstract

There is a mention of the creation of complex numbers in the mathematical textbook volume 2 of learning mathematics group Mathayom Suksa 5 according to the Basic Education Curriculum BE 2544 of the Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology (IPST) on the topic of Complex Numbers. It is known that in the real number system, some polynomial equations have no answers which are real numbers, such as the equation $x^2 + 1 = 0$ because the square of any real number will always be greater than or equal to zero. Therefore, the sum of the square of any real number and one must greater than zero. So there is no answer which is the real number of such equation. The cause of such a problem is that there is a construction of the new number system for covering all of the answers of polynomial equations which is called the complex number system. This article is a personal opinion of the author about the relationship between the set of real numbers and the set of complex numbers. The article shows the relationship between the set of real numbers and the set of complex numbers from another point of view.

Keywords: Real numbers; Complex; numbers

บทนำ

หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของ สสวท. เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ได้กล่าวถึงสาเหตุที่มีการสร้างจำนวนเชิงซ้อนขึ้นมาคือ ในระบบจำนวนจริง สมการพหุนามบางสมการไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง เช่น สมการ $x^2 + 1 = 0$ เนื่องจากกำลังสองของจำนวนจริงใดๆ จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ ดังนั้นผลบวกของ

กำลังสองของจำนวนจริงใดๆ กับหนึ่งต้องมีค่ามากกว่าศูนย์

จากสาเหตุดังกล่าวจึงได้มีการสร้างระบบจำนวนซึ่งขยายระบบจำนวนจริงออกไป เพื่อให้สามารถครอบคลุมทุกคำตอบของสมการพหุนามทั้งหมดได้ ดังนั้นจึงจะพิจารณาเซตที่มีเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซต โดยมีการกำหนดบทนิยามของจำนวนเชิงซ้อน การเท่ากัน การบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

บทนิยาม จำนวนเชิงซ้อนคือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และสำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

$(a, b) = (c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

สิ่งที่น่าสนใจคือ การกล่าวว่า เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน นั้นถูกต้องแล้วหรือไม่

เนื้อเรื่อง

ในความเห็นของผู้เขียนบทความเห็นว่า การเขียนเช่นนี้นับว่าเป็นข้อควรระวังอย่างยิ่ง ที่อาจทำให้นักเรียน หรือแม้แต่คุณครูผู้สอนเองเข้าใจผิดว่า เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อนจริง โดยในแบบเรียนได้มีการพิจารณาจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(x, 0)$ จากนิยามการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน จะเห็นว่า

$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$

$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$

ซึ่งมีลักษณะเหมือนกับ การบวกและการคูณจำนวนจริง ฉะนั้นเราสามารถถือได้ว่าจำนวนเชิงซ้อนรูป $(a, 0)$ เป็นจำนวนจริง a ตามข้อสังเกตนี้จะได้ว่า เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ผู้เขียนบทความเชื่อว่าผู้เขียนหนังสือไม่ได้เจตนาให้ผู้อ่านเข้าใจเช่นนั้นจริงๆ แต่การเขียนอธิบายในเรื่องนี้อาจทำได้ลำบาก เพราะนักเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษายังมีความรู้พื้นฐานไม่เพียงพอ ดังที่ผู้เขียนบทความจะอธิบายต่อไป

ในทัศนะของผู้เขียนบทความเชื่อว่า เราไม่สามารถกล่าวได้ว่า เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน เพราะถ้าเราพิจารณาดูจะเห็นว่าการนิยามเซต การดำเนินการ (การบวก การคูณ) บนเซตของจำนวนจริงและเซตของจำนวนเชิงซ้อนนั้นแตกต่างกัน การเปรียบเทียบระหว่างจำนวนสองจำนวน (มากกว่า หรือน้อยกว่า) ซึ่งมีการนิยามบนเซตของจำนวนจริง แต่ไม่มีการนิยามบนเซตของจำนวนเชิงซ้อน หรือแม้แต่การแทนจำนวนจริงซึ่งแทนด้วย จุดบนเส้นจำนวน แต่การแทนจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วย จุดในระบบพิกัด (x, y)

แท้จริงแล้วสิ่งที่เราสามารถกล่าวได้คือ เซตของจำนวนจริงสมสัณฐาน (isomorphic) กับเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(x, 0)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

ก่อนอื่นผู้เขียนบทความจะให้บทนิยามของคำว่า การดำเนินการบนเซต พีชคณิต และการสมสัณฐานระหว่างพีชคณิตก่อน สำหรับนักเรียนที่ยังไม่เคยรู้จักกับคำนิยามศัพท์ดังกล่าว

บทนิยาม สำหรับเซต A ซึ่งไม่เป็นเซตว่าง และจำนวนเต็มบวก n ใดๆ การดำเนินการ n อันดับบน A (n –ary operation on A) คือ ฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A

ในกรณีที่ $n = 1$ เราเรียกการดำเนินการ 1 –อันดับ ว่า การดำเนินการเอกภาค (unary operation)

ในกรณีที่ $n = 2$ เราเรียกการดำเนินการ 2 –อันดับ ว่า การดำเนินการทวิภาค (binary operation) เป็นต้น

บทนิยาม พีชคณิต (algebra) ประกอบไปด้วย เซตเซตหนึ่งที่ไม่เป็นเซตว่าง และ ลำดับของการดำเนินการบนเซตนั้น

เช่น พีชคณิต $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ประกอบด้วยเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ พร้อมด้วยการดำเนินการทวิภาคสองตัว คือการบวก และการคูณปกติ

พีชคณิต $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ ประกอบด้วย $\{-1, 0, 1\}$ พร้อมด้วยการดำเนินการทวิภาคหนึ่งตัว คือ การคูณปกติ

พีชคณิต $(\mathbb{Z}, f)$ ประกอบด้วย เซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z}$ พร้อมด้วยการดำเนินการเอกภาค f ซึ่งกำหนด

$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ โดยที่ $f(x) = 2x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{Z}$

หมายเหตุ พีชคณิต $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ จัดเป็นพีชคณิตชนิด (2, 2) เนื่องจากมีการดำเนินการสองตัว ซึ่งเป็นการดำเนินการทวิภาคทั้งคู่

พีชคณิต $(\{-1, 0, 1\}, \cdot)$ จัดเป็น พีชคณิตชนิด (2) เนื่องจากมีการดำเนินการทวิภาคหนึ่งตัว

พีชคณิต $(\mathbb{Z}, f)$ จัดเป็น พีชคณิตชนิด (1) เนื่องจากมีการดำเนินการเอกภาคหนึ่งตัว

ต่อไปเป็นบทนิยามการสมสัณฐาน ระหว่างพีชคณิตชนิด (2, 2)

บทนิยาม ให้ $(A, +, \cdot)$ และ $(B, \oplus, \otimes)$ เป็นพีชคณิตชนิด (2, 2) จะกล่าวว่า พีชคณิต $(A, +, \cdot)$ สมสัณฐาน (isomorphic) กับพีชคณิต $(B, \oplus, \otimes)$ ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน

$f : A \rightarrow B$ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one) และทั่วถึง (onto) และ สำหรับทุก $a, b \in A$ จะได้ว่า

$$f(a + b) = f(a) \oplus f(b) \quad \text{และ} \quad f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$$

ถ้าพีชคณิต $(A, +, \cdot)$ สมสัณฐานกับพีชคณิต $(B, \oplus, \otimes)$ จะเขียนแทนด้วย $(A, +, \cdot) \cong (B, \oplus, \otimes)$

ในทางคณิตศาสตร์ถือว่าถ้าพีชคณิตสองพีชคณิตสมสัณฐานกัน พีชคณิตทั้งสองจะมีโครงสร้างแบบเดียวกัน ดังนั้นถ้าการแก้ปัญหาในพีชคณิตหนึ่งทำได้ลำบาก เราสามารถไปแก้ปัญหาในอีกพีชคณิตหนึ่งที่สมสัณฐานกันแทน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาอธิบายปัญหานั้นในพีชคณิตแรกได้ เช่น

จากที่กล่าวถึงในตอนแรกว่า เซตของจำนวนจริงสมสัณฐานกับเซตของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(x, 0)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง นั่นคือ

ถ้าให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

$$(R, +, \cdot) \cong (\{(x, 0) \mid x \in R\}, +, \cdot)$$

เนื่องจากมีฟังก์ชัน $f : R \rightarrow \{(x, 0) \mid x \in R\}$ กำหนดโดย สำหรับทุก $x \in R$, $f(x) = (x, 0)$ ซึ่งเห็นได้ชัดว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง และสำหรับแต่ละ $x, y \in R$ จะได้ว่า

$$f(x + y) = (x + y, 0) = (x, 0) + (y, 0) = f(x) + f(y)$$

และ

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = f(x) \cdot f(y)$$

ดังนั้นจะเห็นว่าการแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณบน $\{(x, 0) \mid x \in R\}$ เราสามารถนำมาแก้ปัญหาบนเซตของจำนวนจริงแทน แล้วจึงนำผลที่ได้ไปอธิบายบนเซต $\{(x, 0) \mid x \in R\}$ เช่น

ถ้าต้องการหาผลคูณระหว่างจำนวนเชิงซ้อน (12, 0) กับ (5, 0) แทนที่จะหาผลคูณโดยนิยามการคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(12, 0) \cdot (5, 0) = (12 \cdot 5 - 0 \cdot 0, 12 \cdot 0 + 5 \cdot 0) = (60, 0)$ เราสามารถหาผลคูณระหว่างจำนวนจริง 12 กับ 5 แทน ซึ่งเท่ากับ 60 แล้วนำไปสรุปได้ว่า

$$(12, 0) \cdot (5, 0) = (60, 0)$$

ซึ่ง **ง่ายกว่ากันอย่างเห็นได้ชัด**

สรุปและเสนอแนะ

ดังนั้นการเขียนข้อความ <u>เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน</u> โดยใช้นิยามของจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดไว้ข้างต้น ผู้อ่านควรตระหนักว่าการที่เซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อนนั้น เริ่มต้นด้วยการถือเอา หรือ กำหนดให้เป็น ซึ่งโดยปกติแล้ว ไม่ได้เป็นสับเซตกัน แต่การกล่าวดังนี้อาจให้ไว้เพียงเฉพาะตอนแรกเท่านั้น ซึ่งต่อไปด้วยความสะดวก เราจึงละการถือเอาออกไป เหลือไว้เฉพาะ การเป็นสับเซตกันอย่างเดียว ซึ่งอยู่ในลักษณะเดียวกันกับกรณี “จำนวนเต็มเป็นจำนวนตรรกยะ” นั่นเอง

เอกสารอ้างอิง

[1] สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ (2547) *หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม2*. กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

[2] Denecke, K., & Wismath, Sh.L. (2002). *Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science*. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC.