ความสวยงามวางนัยทั่วไป : ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9

Generalized Beauty: The Product of the Arranged Number by Increasing from Number 1 to the Left and the Number 9

อภิสิทธิ์ เมืองมา และ อัยเรศ เอี่ยมพันธ์*
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยพะเยา อ.เมือง จ.พะเยา 56000
*E-mail: aiyared.ia@up.ac.th

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอการศึกษาและการหารูปแบบทั่วไปของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9 โดยใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และขั้นตอนวิธีการหารในการพิสูจน์ ผลการศึกษาพบว่าผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายกับเลข 9 จะขึ้นอยู่กับจำนวนหลักและเลขหลักสุดท้ายของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้าย

คำสำคัญ : อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ขั้นตอนวิธีการหาร จำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้าย เลขฐานสิบ

Abstract

This study investigated the general form of the product of the arranged number by increasing from number 1 to the left and the number 9. The principle of mathematical induction and the division algorithm were used for the proof. The results showed that the product of the arranged number by increasing from number 1 to the left and the number 9 depended on the number of digits and the number of the last digit of the arranged number by increasing from number 1 to the left.

Keywords: Mathematical induction: Division algorithm: Arranged number by increasing from number 1 to the left: Decimal number

1. บทนำ

จากการอ่านวารสาร “เวทีปฏิรูป” [2] มีความสวยงามของผลคูณที่ผู้เขียนประทับใจ ซึ่งวารสารได้เขียนแสดงไว้ดังนี้

$$987654321 \times 9 = 8888888889$$

เราสังเกตเห็นผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายจนถึงเลข 9 กับเลข 9 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 1\times 9 &= 09 \\ 21\times 9 &= 189 \\ 321\times 9 &= 2889 \\ 4321\times 9 &= 38889 \\ 54321\times 9 &= 488889 \\ 654321\times 9 &= 5888889 \\ 7654321\times 9 &= 68888889 \\ 87654321\times 9 &= 788888889 \\ 987654321\times 9 &= 8888888889 \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

จาก (1) เราจะพบว่าจำนวนที่นำมาคูณกับเลข 9 มีอยู่เพียงเก้าจำนวน คือ

1,21,321,4321,54321,654321,7654321,
87654321, และ 987654321

ซึ่งเราจะเรียกจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้ายลักษณะเช่นนี้อย่างง่ายว่า **จำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1** (arranged number from number 1) เราพบว่าผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 กับเลข 9 ใน (I) คือจำนวนที่มีจำนวนหลักมากกว่าหรือเท่ากับจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 อยู่หนึ่งหลัก โดยที่หลักหน่วยเป็นเลข 9 เสมอ และหลักสุดท้ายเป็นเลขที่มีค่าน้อยกว่าเลขหลักสุดท้ายของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 อยู่หนึ่ง และหลักที่เหลือเป็นเลข 8 ทั้งหมด ซึ่งจำนวนของเลข 8 นี้เท่ากับเลขหลักสุดท้ายของผลคูณเมื่อเลขหลักสุดท้ายของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 นี้น้อยกว่าหรือเท่ากับ 9

ตัวอย่าง 1 ผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 ถึงเลข 9 กับเลข 9 คือ

$$987654321 \times 9 = 8888888889$$

เราพบว่าผลคูณที่ได้เป็นจำนวนที่มีจำนวนหลักเท่ากับสิบ ซึ่งมากกว่าจำนวนหลักของ 987654321 ที่มีจำนวนหลักเท่ากับเก้าอยู่หนึ่งหลัก และหลักหน่วยของผลคูณนั้นเป็นเลข 9 เสมอ หลักสุดท้ายเป็นเลข 8 ซึ่งน้อยกว่าหลักสุดท้ายของ 987654321 ที่เป็นเลข 9 อยู่หนึ่ง และหลักที่เหลือของผลคูณเป็นเลข 8 ทั้งหมด ซึ่งจำนวนของเลข 8 นี้เท่ากับแปด นั่นคือเท่ากับเลขหลักสุดท้ายของผลคูณ #

จากวารสาร "เวทีปฏิรูป" [2] พบว่าเลขหลักสุดท้ายของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 นี้น้อยกว่าหรือเท่ากับ 9 ซึ่งเป็นจำนวนที่มีจำนวนหลักน้อยกว่าหรือเท่ากับเก้าเช่นกัน ด้วยเหตุนี้จึงเกิดข้อสงสัยว่าถ้าเลขหลักสุดท้ายของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 มีค่ามากกว่าเลข 9 แล้วผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 กับเลข 9 จะมีลักษณะและรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนเช่นเดียวกับ (I) หรือไม่

ในการศึกษาของบทความนี้ได้ใช้จำนวนที่นิยามจากขั้นตอนวิธีการหารเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการพิสูจน์ดังต่อไปนี้

จาก [1] กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และ $b = 10$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม q และ r ที่ทำให้ $a = 10 \cdot q + r$ เมื่อ $0 \leq r < 10$ และเขียนแทนด้วย

$$a := {}_q r \qquad \text{(II)}$$

เช่น

$$\begin{array}{lll} 0 = {}_0 0 & 10 = {}_1 0 & 70 = {}_7 0 \\ 1 = {}_0 1 & 11 = {}_1 1 & 71 = {}_7 1 \\ 2 = {}_0 2 & 12 = {}_1 2 & 72 = {}_7 2 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ 9 = {}_0 9 & 19 = {}_1 9 & 79 = {}_7 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 130 = {}_{13} 0 & 3650 = {}_{365} 0 \\ 131 = {}_{13} 1 & 3651 = {}_{365} 1 \\ 132 = {}_{13} 2 & 3652 = {}_{365} 2 \\ \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots & \vdots\ \ \vdots\ \ \vdots \\ 139 = {}_{13} 9 & 3659 = {}_{365} 9 \end{array}$$

เพื่อความสะดวก เราจะเขียน ${}_0 r$ ด้วย r สำหรับทุกจำนวนเต็ม $0 \leq r < 10$

2. ความสวยงามวางนัยทั่วไป

บทความนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะแสดงให้เห็นถึงความสวยงามของคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่งจากข้อสงสัยในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 กับเลข 9 ซึ่งผลคูณมีรูปแบบน่าประหลาดใจสำหรับผู้เขียนหลังจากการอ่านวารสาร "เวทีปฏิรูป" [2]

จากการแปลงเลขฐานสิบใน (II) นั้น จะเห็นว่าเลขที่ถูกแปลงขึ้นมาไม่ใช่เลขฐานสิบปกติ ฉะนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญและนำทฤษฎีบทไปใช้เพื่อให้เข้าใจผลลัพธ์ได้ง่าย จะแนะนำการแปลงเลขจาก (II) กลับไปเป็นเลขฐานสิบ

การแปลงเลขที่ได้จาก (II) เป็นเลขฐานสิบปกติทำได้โดยการบวกทแยงจากเศษเหลือตัวขวากับผลหารตัวซ้าย เพื่อให้เข้าใจได้ง่ายจะขอยกตัวอย่างการแปลงจำนวน $317\,{}_2 6\,{}_5 4\,{}_4 509$ เป็นเลขฐานสิบ ดังนี้

$$317\,{}_{2}6\,{}_{5}4\,{}_{4}509$$
$$= 31(7+2)(6+5)(4+4)509$$
$$= 319\,{}_{1}18509$$
$$= 31(9+1)18509$$
$$= 31\,{}_{1}018509$$
$$= 3(1+1)018509$$
$$= 32018509$$

บทนิยาม 2 สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m นิยาม $\#(m)$ แทนจำนวนของ m

เพื่อความสะดวกต่อการเขียนและการพิสูจน์ เราจะแนะนำให้รู้จักกับสัญกรณ์ที่ใช้แทนจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 ถึง ${}_{q}r$ ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3 สำหรับทุกจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 ถึง ${}_{q}r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ นิยาม

$${}_{q}r \leftarrow 1 := {}_{q}r\,{}_{q}(r-1)\ldots{}_{1}1\,{}_{1}09\ldots321 \qquad \text{(II)}$$

เช่น

$$1 \leftarrow 1 = 1$$
$$2 \leftarrow 1 = 21$$
$$3 \leftarrow 1 = 321$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$9 \leftarrow 1 = 987\ldots321$$
$${}_{1}0 \leftarrow 1 = {}_{1}098\ldots321$$
$${}_{1}1 \leftarrow 1 = {}_{1}1\,{}_{1}09\ldots321$$
$${}_{1}2 \leftarrow 1 = {}_{1}2\,{}_{1}1\,{}_{1}0\ldots321$$
$${}_{1}3 \leftarrow 1 = {}_{1}3\,{}_{1}2\,{}_{1}1\ldots321$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$${}_{1}9 \leftarrow 1 = {}_{1}9\,{}_{1}8\,{}_{1}7\ldots321$$
$${}_{2}0 \leftarrow 1 = {}_{2}0\,{}_{1}9\,{}_{1}8\ldots321$$

ข้อสังเกตต่อไปนี้จะใช้ในการพิสูจน์บทตั้ง 5 และ 7 และทฤษฎีบท 9

ข้อสังเกต กำหนดให้ n และ i เป็นจำนวนเต็มบวก และ q_i และ r_i เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $0 \le r_i < 10$ และ $1 \le i \le n$ จะได้ว่า

$${}_{q_n}r_n\,{}_{q_{n-1}}r_{n-1}\,{}_{q_{n-2}}r_{n-2}\cdots{}_{q_3}r_3\,{}_{q_2}r_2\,{}_{q_1}r_1$$
$$= {}_{q_n}r_n(0+{}_{q_{n-1}}r_{n-1})(0+{}_{q_{n-2}}r_{n-2})\ldots$$
$$(0+{}_{q_3}r_3)(0+{}_{q_2}r_2)(0+{}_{q_1}r_1)$$
$$= {}_{q_n}r_n\underbrace{00\ldots000}_{\#(0)=n-1} + {}_{q_{n-1}}r_{n-1}\,{}_{q_{n-2}}r_{n-2}\cdots{}_{q_3}r_3\,{}_{q_2}r_2\,{}_{q_1}r$$

บทตั้ง 4 [1] กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_{q}r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $0 \le r+1 < 10$ แล้ว $n+1 = {}_{q}(r+1)$

(2) ถ้า $r+1 = 10$ แล้ว $n+1 = {}_{q+1}0$

เราจะใช้หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์บทตั้ง 5 และทฤษฎีบท 9 ดังต่อไปนี้

บทตั้ง 5 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_{q}r$ และ $q \ge 1$ และ $0 \le r < 10$ จะได้ว่า ${}_{q}r \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10\cdot q) + r + m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ q เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ ${}_{q}r \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10\cdot q) + r + m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ q เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ กรณี $0 \le n \le 9$ เห็นได้ชัดว่าจำนวนที่เลขเรียงกันเพิ่มขึ้นจากเลข 1 ไปทางซ้าย มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10\cdot q) + r + m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ q เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ จะพิสูจน์ว่า $P(10)$ เป็นจริง นั่นคือ จะแสดงว่า ${}_{1}0 \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ 11 หลัก เราพบว่า ${}_{1}0 \leftarrow 1 = 10987654321$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $11 = (10\cdot 1) + 0 + 1$ หลัก เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ ฉะนั้น $P(10)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก $k \ge 10$ และกำหนดให้ $k = {}_{s}t$ เมื่อ s และ t เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $0 \le t < 10$ จะได้ว่า ${}_{s}t \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10\cdot s) + t + m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ s เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ในที่นี้จะแบ่งเป็น 2 กรณี

กรณี 1 ถ้า $0 \leq t+1 < 10$ จากบทตั้ง 4 จะได้ว่า $k+1 = {}_s(t+1)$ ดังนั้น

$${}_s(t+1) \leftarrow 1$$

$$= {}_s(t+1)\,{}_s t\,{}_s(t-1)\,{}_s(t-2)\ldots{}_1 1\,{}_1 09\ldots 321$$

$$= {}_s(t+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s t} + {}_s t\,{}_s(t-1)\,{}_a(t-2)\ldots{}_1 1\,{}_1 09\ldots 321$$

เนื่องจาก ${}_s t \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10 \cdot s)+t+m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ s เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ จะได้ว่า

$${}_s(t+1)\underbrace{000...0}_{\#(0)={}_s t} + {}_s t\,{}_s(t-1)\,{}_s(t-2)...{}_1 1\,{}_1 09...321$$

มีจำนวนหลักเท่ากับ $10 \cdot s+(t+1)+m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ s เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ ดังนั้น ${}_s(t+1) \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $10 \cdot s+(t+1)+m$ หลัก เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ

กรณี 2 ถ้า $t+1=10$ จากบทตั้ง 4 จะได้ว่า $k+1 = {}_{s+1}0$ ดังนั้น

$${}_{s+1}0 \leftarrow 1$$

$$= {}_s 9\,{}_s 8\,{}_s 7\ldots{}_1 1\,{}_1 09\ldots 321$$

$$= ({}_{s+1}0)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s 9} + {}_s 9\,{}_s 8\,{}_s 7\ldots{}_1 1\,{}_1 09\ldots 321$$

เนื่องจาก ${}_s 9 \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10 \cdot s)+9+m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ s เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ จะได้ว่า

$$({}_{s+1}0)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s 9} + {}_s 9\,{}_s 8\,{}_s 7\ldots{}_1 1\,{}_1 09\ldots 321$$

มีจำนวนหลักเท่ากับ

$(10 \cdot s)+(9+1)+m = (10 \cdot (s+1))+m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ s เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ ดังนั้น ${}_{s+1}0 \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10 \cdot (s+1)+m = (10 \cdot (s+1))+0+m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ s เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า ${}_q r \leftarrow 1$ มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10 \cdot q)+r+m$ หลัก โดยที่ m คือจำนวนหลักของ q เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $n = {}_q r$ และ $q \geq 1$ #

ตัวอย่าง 6 จงหาจำนวนหลักของ

$${}_4 5 \leftarrow 1 = {}_4 5\,{}_4 4\,{}_4 3\ldots 321$$

เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ

วิธีทำ โดยบทตั้ง 5 จะได้ว่า

$${}_4 5 \leftarrow 1 = {}_4 5\,{}_4 4\,{}_4 3\ldots 321$$

มีจำนวนหลักเท่ากับ $(10 \cdot 4)+5+1 = 46$ หลัก เมื่อแปลงเป็นเลขฐานสิบ

ตรวจคำตอบโดยการแปลงเป็นเลขฐานสิบ

$${}_4 5 \leftarrow 1$$

$$= {}_4 5\,{}_4 4\,{}_4 3...321$$

$$= 4987654320987654320987 6$$

$$54320987654320987654321$$

ซึ่งมีจำนวนหลักเท่ากับ 46 หลัก #

บทตั้ง 7 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ s และ t เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq t < 10$ จะได้ว่า

$${}_s t\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m} \times n = ({}_s t \times n)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}$$

การพิสูจน์ พิจารณา

$${}_s t\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m} \times n$$

$$= \underbrace{{}_s t\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m} + {}_s t\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m} + \ldots + {}_s t\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}}_{\#({}_s t\underbrace{00\ldots0}_{\#(0)=m})=n}$$

$$= (\underbrace{{}_s t + {}_s t + {}_s t + \ldots + {}_s t}_{\#({}_s t)=n})\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}$$

$$= (n \times {}_s t)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)=m}$$

บทตั้ง 8 สำหรับทุกจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ s และจำนวนเต็ม t ซึ่ง $0 \leq t < 10$ จะได้ว่า

$${}_s t = \begin{cases} st \ , \ s > 0 \\ t \ \ , \ s = 0 \end{cases}$$

การพิสูจน์ ถ้า $s = 0$ แล้ว

$${}_0 t = (10 \cdot 0)+t = 0+t = t$$

กำหนดให้ $s > 0$ จะได้ว่า

$${}_s t = (10 \cdot s)+t = s0+t = st \qquad \#$$

ทฤษฎีบท 9 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $n = {}_q r$ เมื่อ q และ r เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$({}_q r \leftarrow 1) \times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_q(r-1)}9, & 1 \le r < 10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9, & r = 0 \end{cases}$$

การพิสูจน์ กำหนดให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$({}_q r \leftarrow 1) \times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_q(r-1)}9, & 1 \le r < 10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9, & r = 0 \end{cases}$$

เนื่องจาก $1 \times 9 = 09$ นั่นคือ $P(1)$ เป็นจริง สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k และกำหนดให้ $k = {}_s t$ เมื่อ s และ t เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \le r < 10$ จะได้ว่า

$$({}_s t \leftarrow 1) \times 9 = \begin{cases} {}_s(t-1)\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9, & 1 \le t < 10 \\ {}_{s-1}9\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9, & t = 0 \end{cases}$$

จะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง ซึ่งจะแบ่งเป็น 3 กรณี

กรณี 1 ถ้า $1 \le t \le 8$ แล้ว $2 \le t+1 \le 9$ และ $k+1 = {}_s(t+1)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
({}_s(t+1) \leftarrow 1) \times 9 &= \left[{}_s(t+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s t} + {}_s t\, {}_s(t-1)\, {}_s(t-2)\ldots {}_1 1_1 09\ldots321 \right] \times 9 \\
&= \left[{}_s(t+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s t} \times 9 \right] + \left[{}_s t\, {}_s(t-1)\, {}_s(t-2)\ldots {}_1 1_1 09\ldots321 \times 9 \right] \\
&= \left[{}_s(t+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s t} \times 9 \right] + \left[{}_s(t-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \right] \\
&= \left[9 \times {}_s(t+1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s t} \right] + \left[{}_s(t-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \right] \\
&= \left[(9 \times {}_s(t+1)) + {}_s(t-1) \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= \left[(9 \times (10) \cdot s + (t+1))) + (10 \cdot s)6 + (t-1) \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= \left[(90 \cdot s) + (9 \cdot t) + 9 + (10 \cdot s) + (t-1) \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= \left[(100 \cdot s) + (10 \cdot t) + 8 \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= \left[(10 \cdot (10 \cdot s \cdot t)) + 8 \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= \left[(10 \cdot {}_s t) + 8 \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= \left[{}_{s^t} 8 \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= \left[{}_s t8 \right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s(t-1)}9 \\
&= {}_s t\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s t}9
\end{aligned}$$

กรณี 2 ถ้า $t=9$ แล้ว $k+1={}_{s+1}0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
({}_{s+1}0 \leftarrow 1)\times 9 &= \left[({}_{s+1}0)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_{s}t} + {}_{s}t_{s}(t-1)\ldots{}_{1}1_{1}09\ldots321\right]\times 9 \\
&= \left[({}_{s+1}0)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_{s}t}\times 9\right] + \left[{}_{s}t_{s}(t-1)\ldots{}_{1}1_{1}09\ldots321\times 9\right] \\
&= \left[(9\times {}_{s+1}0)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_{s}t}\right] + \left[{}_{s}t_{s}(t-1)\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9\right] \quad \text{(จากบทตั้ง 7)} \\
&= \left[(9\times {}_{s+1}0) + {}_{s}(t-1)\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(9\times(10\cdot(s+1)+0)) + 10\cdot s + (t-1))\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(9\times(10\cdot s+10)) + (10\cdot s) + t - 1\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(90\cdot s) + 90 + (10\cdot s) + (t-1)\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(100\cdot s) + t + 89\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(100\cdot s) + t + 81 + 8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(100\cdot s) + t + 9\cdot t + 8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(100\cdot s) + (10\cdot t) + 8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(10\cdot(10\cdot s + t)) + 8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[(10\cdot {}_{s}t) + 8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[{}_{s\,t}8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \\
&= \left[{}_{s}t8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}(t-1)}9 \quad \text{(จากบทตั้ง 8)} \\
&= {}_{s\,t}8\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s}t}9
\end{aligned}
$$

กรณี 3 ถ้า $t=0$ แล้ว $k+1={}_s1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
{}_s(1\leftarrow 1)\times 9 &= \left[{}_s1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s0} + {}_s0_{s-1}9_{s-1}8\ldots{}_11_109\ldots321\right]\times 9\\
&= \left[{}_s1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s0}\times 9\right] + \left[{}_s0_{s-1}9_{s-1}8\ldots{}_11_109\ldots321\times 9\right]\\
&= \left[{}_s1\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s0}\times 9\right] + \left[{}_{s-1}9\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\right]\\
&= \left[(9\times{}_s1)\underbrace{000\ldots0}_{\#(0)={}_s0}\right] + \left[{}_{s-1}9\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\right] \qquad \text{(จากบทตั้ง 7)}\\
&= \left[(9\times{}_s1)+{}_{s-1}9\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\\
&= \left[(9\times((10\cdot s)+1))+(10\cdot(s-1))+9\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\\
&= \left[(90\cdot s)+9+(10\cdot s)-1\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\\
&= \left[(100\cdot s)+8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\\
&= \left[(10\cdot(10\cdot s+0))+8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\\
&= \left[(10\cdot{}_s0)+8\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\\
&= \left[{}_s08\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9\\
&= \left[{}_s08\right]\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{s-1}9}9 \qquad \text{(จากบทตั้ง 8)}\\
&= {}_s08\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_s0}9
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$
({}_qr\leftarrow 1)\times 9 = \begin{cases} {}_q(r-1)\ \underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_q(r-1)}\ 9, & 1\le r<10 \\ {}_{q-1}9\underbrace{888\ldots8}_{\#(8)={}_{q-1}9}9, & r=0 \end{cases}
$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เมื่อ $n={}_qr$ #

ตัวอย่าง 10 จงหาผลคูณ $({}_{1}7 \leftarrow 1) \times 9$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
({}_{1}7 \leftarrow 1) \times 9 &= {}_{1}(7-1)\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{1}(7-1)}9 \\
&= {}_{1}6\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{1}6}9 \\
&= 16\underbrace{888...8}_{\#(8)=16}9
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์

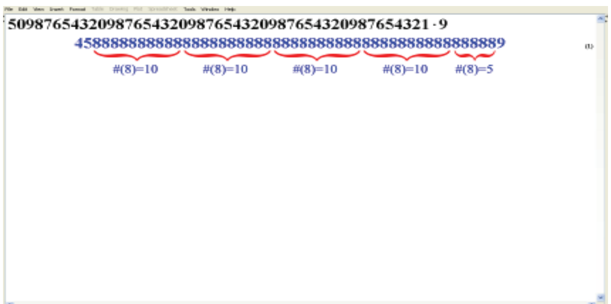
รูปที่ 1 : ผลคูณ $({}_{1}7 \leftarrow 1) \times 9$ #

ตัวอย่าง 11 จงหาผลคูณ $({}_{4}6 \leftarrow 1) \times 9$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 9 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
({}_{4}6 \leftarrow 1) \times 9 &= {}_{4}(6-1)\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{4}(6-1)}9 \\
&= {}_{4}5\underbrace{888...8}_{\#(8)={}_{4}5}9 \\
&= 45\underbrace{888...8}_{\#(8)=45}9
\end{aligned}
$$

ตรวจคำตอบด้วยคอมพิวเตอร์



รูปที่ 2 : ผลคูณ $({}_{4}6 \leftarrow 1) \times 9$ #

3. บทสรุป

ข้อสงสัยเล็กๆ น้อยๆ จากการที่ได้อ่านวารสาร ประกอบกับหลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับบทความนี้ ทำให้ได้รูปแบบทั่วไปที่แน่นอนของผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 กับเลข 9 ซึ่งนับว่ามีประโยชน์สำหรับการหาผลลัพธ์ และยังได้แสดงให้เห็นถึงความสวยงามของคณิตศาสตร์อีกรูปแบบหนึ่งด้วย รวมทั้งบทความนี้ยังได้แสดงให้เห็นว่าเราสามารถเขียนผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 กับเลข 9 ในรูปแบบทั่วไปที่แน่นอนได้โดยทฤษฎีบท 9 และยิ่งไปกว่านั้น เรายังสามารถหาจำนวนหลักของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 ได้โดยบทตั้ง 5 ดังนั้นการคำนวณหาผลคูณของจำนวนที่เลขเรียงกันจากเลข 1 กับเลข 9 จึงไม่ใช่เรื่องยากอีกต่อไป

4. กิตติกรรมประกาศ

บทความนี้ได้รับการสนับสนุนจากกลุ่มวิจัย : Group for Young Algebraists in University of Phayao (GYA) ผู้เขียนขอขอบพระคุณผู้ประเมินที่ได้ให้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงบทความให้สมบูรณ์

5. เอกสารอ้างอิง

[1] อัยเรศ เอี่ยมพันธ์. 2554. “ความสวยงามวางนัยทั่วไป: การยกกำลังสองของจำนวนที่ทุกหลักเป็นเลข 1”. **วารสารนเรศวรพะเยา** 4(2): 29-35.

[2] สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษานครสวรรค์ เขต 2. **เวทีปฏิรูป** 2(9): 23.

[3] Clark, W. E. 2002. **Elementary Number Theory**. Department of Mathematics, University of South Florida. USA.